方程式の解

みそ

2005.5.15

1　方程式の解

方程式の解を求めるとは、変数が１つだとすると、変数 x を持つある関数 $f(x)$ が

$$f(x) = 0$$

を満たす場合の解 x の値を求めるということである。例えば次のような方程式

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

を解く場合は、次のように因数分解して

$$(x-2)(x-3) = 0$$

この式から解は２と３であるということがわかる。

しかし、もし方程式に三角関数や対数関数があったら解くのは難しい。実際物理問題を解く場合このように簡単には解けない。ある現象を満たしている方程式は、数値的にしか解けない場合が多いのである。数値的に解くということは、基本的には、方程式に数値をいれ、その方程式を満たす数値を見つけるということである。もし人の手で数値的に計算するとすれば大変である。そこでコンピュータで数値的に解く方法が考え出された。ここではコンピュータで方程式を解く簡単な方法を紹介する。

2　２分法

ある方程式 $f(x) = 0$ の解の左側と右側にある x 軸上の点の値をそれぞれ a と b とすると必ず次の関係式が成り立つ。

$$f(a)f(b) < 0$$

２分法ではこの性質を利用する。
　まず上記の式を満たす a, b の初期値として適当に決める。そして変数 m を

$$m = \frac{a+b}{2}$$

とする。これを仮の解とする。もし

$$f(m)f(a) < 0$$

なら仮の解は、実際の解より右側にあるということだから $b = m$ とする。そうでないならば仮の解は、実際の解より左側にあるということだから $a = m$ とする。そして新たに決まった a, b の値を用いて $m = \frac{a+b}{2}$ と計算し、また繰り返し新たな a, b の値を求めるのである。そして微小値を eps として a, b が次の関係式

$$|a - b| < eps$$

満たしたら計算終了とし、そこで得られた m を解とするのである。　しかし、２分法は最も簡単で確実に解を求められる方法であるが、解が求まるまで（収束するまで）結構計算回数が多くなる。そこでもっと効率的で解を求めるニュートン法というものがある。

3　ニュートン法

　ニュートンとは、接線を利用する。ある方程式 $f(x) = 0$ があるとする。$y = f(x)$ として関数の曲線を xy 平面に書く。解は描かれた曲線と x 軸と交わる点である。
　そこで解の近辺の x 軸上の点を適当に選びその値を a とする。そして $x = a$ における曲線上の点で接する接線を描く。その接線と x 軸上の交点はある場合を除いて実際の解に近づく。その交点の x 軸上の値を $newa$ とする。$f(newa) = 0$ より

$$f'(a) = \frac{-f(a)}{newa - a}$$

だから

$$newa = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

である。

もし $|newa - a| < eps$ とを満たせば計算終了とする。満たさない場合は $newa$ の値を a に代入してまた上記の計算を繰り返すのである。

このニュートン法は 2 分法と比べると、だいぶ速く解が求まる。しかし、曲線の形によっては上手く解が求まらない。極端な例だが、もし接線が x 軸と水平になってしまったら解は求められない。また曲線が複雑な形をしていると接線の傾きがあちらこちら変化して、上手く解が求まらない。よって実際に解が正しいか、描いた曲線から判断することも必要である。

4　2 変数のニュートン法

ここで変数が 2 つある場合のニュートン法を紹介する。次の 2 つの方程式が与えられたとしよう。

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \tag{4.1}$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0 \tag{4.2}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ とおいて、次のように計算を行う。計算の始めに (x_1, x_2) の値を適当に決めておく。

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}_i) \tag{4.3}$$

ただし

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

$$\tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})) \tag{4.9}$$

である。式 (3) の計算を繰り返し行い、$\boldsymbol{C}$ の大きさが微小になったら計算終了で、その時点での $\boldsymbol{x}$ が解である。

5　ベアストウ法

ここで x の n 次方程式を解く方法である、ベアストウ法を紹介する。まず次の方程式

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0 \tag{5.1}$$

が与えられたとしよう。そして、次の形に変形できたとする。

$$(q_0x^{n-2} + q_1x^{n-3} + \cdots + q_{n-3}x + q_{n-2})(x^2 + bx + c) + sx + t = 0 \tag{5.2}$$

もし $s = t = 0$ なら $(x^2 + bx + c) = 0$ を解いて 2 つの解が求まる。すなわち $s = t = 0$ となるように、うまく b と c を選びたいのである。そのためにベアストウ法を用いる。ベアストウ法の手段は次の通りである。

まず初期値として b, c を決める。また n を与えられた方程式の最高次数とし、eps を精度として微小な値を決めておく。そして

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0 \\ q_1 &= p_1 - bq_0 \\ q_2 &= p_2 - bq_1 - cq_0 \\ &\vdots \\ q_n &= p_n - bq_{n-1} - cq_{n-2} \end{aligned} \tag{5.3}$$

と計算を行う。ただし

$$\begin{aligned} s &= q_{n-1} \\ t &= q_n + bq_{n-1} \end{aligned}$$

である。そしてさらに次の計算を行う。

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= -q_0 - bu_0 \\ u_2 &= -q_1 - bu_1 - cu_0 \\ &\vdots \\ u_n &= -q_{n-1} - bu_{n-1} - cu_{n-2} \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 0 \\
w_1 &= -bw_0 \\
w_2 &= -q_0 - bw_1 - cw_0 \\
&\vdots \\
w_n &= -q_{n-2} - bw_{n-1} - cw_{n-2}
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

そして $det, \Delta b, \Delta c$ を次のように計算する。

$$
\begin{aligned}
det &= u_{n-1}w_n - w_{n-1}(u_n + q_{n-1}) \\
\Delta b &= \frac{1}{det}(q_n w_{n-1} - q_{n-1}w_n) \\
\Delta c &= \frac{1}{det}(q_{n-1}(u_n + q_{n-1}) - q_n u_{n-1})
\end{aligned}
$$

そして b, c にそれぞれ $\Delta b, \Delta c$ を足す。また

$$
(\Delta b)^2 + (\Delta c)^2 < eps \tag{5.6}
$$

なら上記の計算は終了とし、そうでないならばまた (5.3) から計算を繰り返す。

計算終了ならば、決まった b, c から $x^2 + bx + c = 0$ を解いて 2 つの解を求める。そして、n を 2 減らし $p_0 = q_0 \sim p_n = q_n$ の計算をしておく。そして (5.3) に戻って計算を繰り返す。

もし n が 2 なら (5.3) に戻らず $p_0x^2 + p_1x + p_2 = 0$ を解いて、全ての計算を終了する。また n が 1 なら $p_0x + p_1 = 0$ を解いて全ての計算を終了する。