離散的フーリエ変換

みそ

2005.2.5

1　フーリエ級数

フーリエ級数とは、任意の関数を三角関数の和で表したものある。全ての関数をフーリエ級数で表せるとは言えないが、少なくとも大学で物理、数学を学ぶときに出てくる関数はほとんどフーリエ級数で表せる。当時このフーリエ級数がフーリエによって発見されたときは各数学者にとって衝撃的だったが、今でもフーリエ級数を知った人にとっても衝撃的だろう。

周期 $2L$ の関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表すと、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}) \qquad (1) \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx
\end{aligned}
$$

またこの式をオイラーの公式、

$$
e^{ix} = \cos x + i\sin x
$$

を用いて変形すると複素フーリエ級数、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \qquad (2) \\
c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}dx
\end{aligned}
$$

が得られる。

2　フーリエ変換

では $f(x)$ が周期関数でないときはフーリエ級数はどうするのか？そこで用いるのがフーリエ変換である。まず上記の複素フーリエ級数から周期を無限と考えて $L \to \infty$ とすればリーマン積分の定義からフーリエ積分公式、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-i\omega(y-x)} \tag{3}$$

が得られる。しかし、今までのフーリエ級数も含めて数学的に厳密に求めるともっと難しくなる。計算物理学から大きく外れるのでここでは論じないが、もっとフーリエ級数について数学的に勉強したい人はフーリエ級数の専門書を見ることを薦める。

さて、フーリエ積分公式を、積分変数について注意してみれば以下の式のように書ける。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \tag{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{5}$$

$F(\omega)$ を $f(x)$ のフーリエ変換、$f(x)$ を $F(\omega)$ のフーリエ逆変換という。関数が周期関数である場合はフーリエ級数を用いて解析するのが便利であり、非周期関数である場合はフーリエ変換を用いて解析するのが便利である。フーリエ変換の応用例はたくさんあり、例えばある信号をフーリエ変換してどのような周波数を含んでるかを調べたり、音声や画像、映像などのデータ処理にも使われている。

いまいちこのフーリエ変換はイメージしにくい。しかしコンピュータで扱う離散的フーリエ変換からある程度イメージがわく。

3　離散的フーリエ変換

あるデータの観測値をフーリエ変換で処理するとき、その値は離散的であるからフーリエ変換において積分を数値的に処理することになる。また積分範囲もある範囲のみに限定することになる。つまり離散的フーリエ変換はフーリエ変換の近似である。コンピュータは極限をとって計算できないからもちろん離散的フーリエ変換を用いることになる。では具

体的にその手法を求めることにする。

ある x_k における関数の値 f_k を、

$$f_k = f(x_k), (k = 0, 1, \cdots, N)$$

と表す。$x_k = kh$ 、周期 T を $T = Nh$ とする。ここでフーリエ変換で得られる角振動数のうち 0 を除いた最低のものを $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ とし、フーリエ変換で得られる $N+1$ 個の角振動数を、

$$\omega_n = n\omega_1 = \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi n}{Nh}, (n = 0, 1, \cdots, N)$$

とする。とすると、

$$\begin{aligned} F(\omega_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &\approx \sum_{k=1}^{N} f(x_k) e^{-i\omega_n x_k} h \\ &= h \sum_{k=1}^{N} f_k e^{-i\frac{2\pi n}{Nh} kh} \\ &= h \sum_{k=1}^{N} f_k e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \end{aligned}$$

この式も離散的な値にするために、離散的な値 F_n を、

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{h} F(\omega_n) \\ &= \sum_{k=1}^{N} f_k e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \qquad (6) \end{aligned}$$

とする。この式を用いて数値的に計算すればフーリエ変換が得られる。また逆フーリエ変換については同様に考えて、

$$\begin{aligned} f_k &= f(x_k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F_n e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \qquad (7) \end{aligned}$$

である。数値計算には式 (6)、(7) を用いるが実数部分と虚数部分に分かれるので、それぞれ分けて計算する必要がある。しかしこの状態で数値計算を行うと結構時間がかかる。これでは実用面で不便なので、高速フーリエ変換と呼ばれる方法が使われる。これは 1965 年に発見された。さらにこのとき発見された方法をより高速化したものもある。