ガウスの消去法

みそ

2004.11.20

1　方法

　連立１次方程式を解くとき、よく使われるのがガウスの消去法である。線形代数を大学で学べば、必ず出てくる方法である。それは、未知数の係数と方程式と右辺の値を行列で並べて、ある操作を加えて、三角行列の形に変えてから解を求める方法である。

未知数ｎ個がありｎ個の方程式からなる連立１次方程式、 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数と右辺の値を並べた行列、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

があったとしよう。ここで、 $\boldsymbol{b}$ の値の表記を変えて、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

とする。こういうふうに表現したほうがプログラムを作りやすい。まず第１行を a_{11} で割り、第２行から第一行を a_{21} 倍したものを引く。以後第３行以降も同様に行い、未知数 x_1 の係数を第１行以外全て０にするのである。一般化すると第ｋ行を a_{kk} で割り、第ｉ行 $(i > k)$ から第ｋ行を a_{ik} 倍したものを引く。そうすると、行列は、次のような形になる。ただ

し、それぞれの行列の成分は計算されて先ほどの行列の成分とは違う値に変わっている。

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

よって、 $x_{nn} = a_{nn+1}$ となり、さらに $x_{nn-1} = a_{n-1n+1} - a_{n-1n}x_{nn}$ と続けて、 x_1 まで求めることができる。

この方法で、もし a_{kk} が0だったら困る。そこで、 $p = a_{kk}$ とおいて、もし $p = 0$ だったら、第k行から第n行までの間のどれかの行と交換して $p = 0$ とならないようにする。これを部分ピボット選択法という。また、さらに場合によって列交換まで行う方法を完全ピボット選択法という。