ヤコビ法

みそ

2004.11.19

n 個の未知数、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ がある、n 個の式からなる連立１次方程式、

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

をヤコビ法と呼ばれる反復法により解を求める。$a_{ii}(i = 1, 2, \cdots, n)$ が 0 でないとすると、

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)\frac{1}{a_{11}} \\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - \cdots - a_{2n}x_n)\frac{1}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \cdots - a_{nn-1}x_{n-1})\frac{1}{a_{nn}}
\end{aligned}
$$

見ればわかるとおり、x_1 から順次解を求めようとしても、まだ値がわからない解の値が右辺にある。そこで、まず全ての解を適当に決める。そして、上記の式の右辺に代入すると、新たな解が計算されて求まる。もし、真の解を代入したとすると新たな解と一致するはずである。しかし、普通そうは上手くいかないが、新たな解は真の解に近づく。実際は真の解に近づかないこともある。得られた新たな解を上記の式の右辺に代入するとまた新たな解が得られる。これらを繰り返して得られた解と一つ前の解が決めた精度内で一致したらそこで終了し、解とする。