静電ポテンシャル

みそ

2004.11.14

1　方法

物理学において自然現象を記述する方程式は大半は偏微分方程式である。しかし、それを解析的に解き、解を特定の式で表すのは難しい。そこで、今回は簡単な数値計算法を紹介する。

ここで、電磁気学ででてくる偏微分方程式、

$$\nabla^2 U(x,y,z) = 0 \tag{1}$$

を考える。これは真空の電荷のない空間を表す方程式である。ここでは、２次元で考えるとして、

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

とする。ｘｙ座標を考え、 $U(x,y)$ の値を用いて、 $U(x \pm \Delta x, y)$ の値を求めるために、２変数のテイラー展開を用いて、

$$U(x \pm \Delta x, y) = U(x,y) \pm \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \cdots \tag{3}$$

この式を用いて、２次まで用いるとして、

$$U(x+\Delta x, y) + U(x-\Delta x, y) = 2U(x,y) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\Delta x)^2 \tag{4}$$

同様に　$U(x, y \pm \Delta y)$ に対しても行って、

$$U(x, y+\Delta y) + U(x, y-\Delta y) = 2U(x,y) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\Delta y)^2 \tag{5}$$

式（２）、（４）、（５）より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{U(x+\Delta x,y)+U(x-\Delta x,y)-2U(x,y)}{(\Delta x)^2} \\ &\quad+\frac{U(x,y+\Delta y)+U(x,y-\Delta y)-2U(x,y)}{(\Delta y)^2} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$\Delta x = \Delta y = \Delta$ とすれば、

$$U(x,y)=\frac{1}{4}\{U(x+\Delta,y)+U(x-\Delta,y)+U(x,y+\Delta)+U(x,y-\Delta)\} \tag{7}$$

任意の座標を (x_i, y_i) とすれば（原点は $i=j=0$ のとき)、

$$U(x_i,y_i)=\frac{1}{4}\{U(x_{i+1},y)+U(x_{i-1},y)+U(x_i,y_{i+1})+U(x_i,y_{i-1})\} \tag{8}$$

つまり、ある一点のポテンシャルの値を求めるには周囲の４点のポテンシャルの値がわかればいいのである。しかし、この方法は近似が粗いため、より正確な値を求めるには、式（８）による求める範囲のすべての座標のポテンシャルの値を求めるアルゴリズムを多数回繰り返すことになる。また、電荷がないところで成り立つので、電荷があるところは境界条件としてそこのポテンシャルの値を固定しておく必要がある。