連立常微分方程式

みそ

2004.11.12

1　方法

　物理で扱われる常微分方程式は、多くはｎ階常微分方程式である。ここで例として、２階常微分方程式、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = F(x, y, z) \tag{1}$$

という形があったとしよう。これは、次のように分解して考えることができる。

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \tag{2}$$

ここで、ルンゲクッタの公式、

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = hf(x_i, y(x_i)) \\ k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}, y_(x_i) + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y(x_i) + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_i + h, y(x_i) + k_3) \end{aligned} \tag{3}$$

を用いて、式（２）それぞれについて新たにルンゲクッタの公式を作ると、

$$\begin{aligned} y_{i+h} = y_i + \frac{1}{6}(k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}) \\ k_{10} = hf_1(x_i, y_i, z_i) \\ k_{20} = hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{10}}{2}, z_i + \frac{k_{11}}{2}) \end{aligned} \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
k_{30} &= hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{20}}{2}, z_i + \frac{k_{21}}{2}) \\
k_{40} &= hf_1(x_i + h, y_i + k_{30}, z_i + k_{31})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{i+h} &= z_i + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) \qquad (5) \\
k_{11} &= hf_2(x_i, y_i, z_i) \\
k_{21} &= hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{10}}{2}, z_i + \frac{k_{11}}{2}) \\
k_{31} &= hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{20}}{2}, z_i + \frac{k_{21}}{2}) \\
k_{41} &= hf_2(x_i + h, y_i + k_{30}, z_i + k_{31})
\end{aligned}
$$

となる。同様にして、３階以上の常微分方程式についてもルンゲクッタの公式を応用したものが作れる。